ESERCIZI SU DISTRIBUZIONI CAMPIONARIE

Esercizio 1

I consumatori di marmellata in una data popolazione sono il 40%. Determinare la probabilità che, per un campione bernoulliano di n = 400 soggetti, la frequenza relativa campionaria sia:

a) maggiore di 0,45; [0,0207]

b) minore di 0,38. [0,2061]

Esercizio 2

Sia X una v.c. normale di media μ ignota e varianza σ^2 = 36. Si determini la numerosità campionaria affinché $P[|\overline{X} - \mu| \leq 0,7] = 0,9216$. [227]

Esercizio 3

Sia X il tempo di maturazione di una varietà di semi, che si suppone normalmente distribuita con media μ e varianza σ^2.

Calcolare la probabilità che la devianza campionaria $(n-1)S^2$ riferita ad un campione di 13 semi risulti maggiore di 21,026 σ^2. [0,05]

Esercizio 4

Siano X e Y due v.c. indipendenti con distribuzione normale di parametri $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 2$ e $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$. Per ciascuna di esse viene estratto un campione casuale di numerosità $n_X = 9$ e $n_Y = 3$.

a) Calcolare la probabilità che la differenza tra le medie campionarie $\overline{Y} - \overline{X}$ sia superiore al valore 1,5 riscontrato in corrispondenza dei 2 campioni. [0,7734]

b) Calcolare la probabilità $P(\overline{Y} - \overline{X} > 2 + 0{,}382 \cdot \sqrt{8 \cdot S_x^2 + 2 \cdot S_y^2})$ ipotizzando di non conoscere il valore di σ_X^2 e σ_Y^2 (è noto però che sono uguali). [0,05]

c) Calcolare quel valore tale per cui sia $P\left(\frac{S_y^2}{S_x^2} > k\right) = 0{,}05$ nell'ipotesi che $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. [4,46]

Esercizio 5

Il contenuto X di alcool metilico di una bottiglia di vino è una variabile casuale normale di media μ =6,5g e varianza σ^2. Considerando un campione di 10 bottiglie:

a) Calcolare la probabilità $P[(\overline{X} - 6{,}5) > S_1]$, dove $S_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 6{,}5)^2}{n}}$. [0,005]

b) Ipotizzando che non sia noto il valore atteso di X e supposto σ^2 = 16, determinare a tale che per la varianza campionaria S^2 si abbia: $P(S^2 \leq a) = 0{,}99$. [38,5173]

Proprietà degli Stimatori

Esercizio 1

Da una v.c. normale X di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 4$ è estratto un campione bernoulliano di ampiezza $n = 6$. Siano

$$T_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{4} X_i - \frac{1}{5}X_5 + \frac{2}{5}X_6$$

due stimatori per la media μ.

a) Mostrare che entrambi gli stimatori sono non distorti per μ.

b) Individuare quale tra i due stimatori è il più efficiente.

c) Dato il campione riportato nella seguente tabella:

x_i	65	72	68	84	75	66

calcolare il valore assunto dagli stimatori T_1 e T_2.

Esercizio 2

Da una popolazione distribuita secondo una v.c. X di Poisson di parametro λ si estrae un campione casuale bernoulliano di n unità. Dimostrare che la media campionaria è stimatore corretto di λ e verificare se è anche consistente.

Esercizio 3

Sia X una v.c. normale X di media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 4$. Fissato $n > 10$, siano T_1 e T_2 i seguenti due stimatori per μ:

$$T_1 = \frac{1}{n-9}\sum_{i=1}^{n-9} X_i \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=n-9}^{n} X_i$$

a) Verificare se tali stimatori sono non distorti per μ.

b) Indicare se, e quando, T_1 risulta più efficiente di T_2.

Esercizio 4

Sia $X_1, X_2, \ldots X_n$ un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale normale di media μ ignota e varianza pari a 1. Si supponga di voler stimare il parametro μ con il seguente stimatore:

$$T_n = \frac{X_1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{n} X_i$$

Dimostrare che tale stimatore:

a) è distorto ma asintoticamente corretto per μ;

b) non è consistente.

Esercizio 5

Sia X_1, X_2, … X_n un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale per la cui distribuzione esistono i primi quattro momenti centrati. E' noto che per lo stimatore $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ della varianza σ^2 valgono le seguenti relazioni:

$$M(S^2) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad V(S^2) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right).$$

S^2 è stimatore consistente per la varianza σ^2?

Esercizio 6

Sia X_1, X_2 ..., X_n un campione bernoulliano estratto da una popolazione avente densità:

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \qquad 0 < x < 1, \theta > 0 .$$

Determinare il limite inferiore di Cramer Rao per stimatori non distorti di θ.

Esercizio 7

Sia X_1, X_2, … X_n un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale avente distribuzione

$$f(x;\vartheta) = \frac{(x+2)(x+1)\vartheta^3(1-\vartheta)^x}{2}, \quad x = 0,1,2,\dots \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Individuare il limite inferiore di Cramer Rao per stimatori non distorti di $\tau(\vartheta) = (1/\vartheta) - 1$.

[Si noti che: $M(X) = \frac{3\cdot(1-\vartheta)}{\vartheta}$, $V(X) = \frac{3\cdot(1-\vartheta)}{\vartheta^2}$]

Esercizio 8

Sia X_1, X_2 ..., X_n un campione bernoulliano estratto da una popolazione avente densità:

$$f(x;\gamma) = \gamma \cdot e^{-\gamma(x-3)} \qquad x \geq 3, \gamma > 0 .$$

Determinare il limite inferiore di Cramer Rao per stimatori non distorti di $1/\gamma$.

[Si noti che: $M(X) = 3 + \frac{1}{\gamma}$, $V(X) = \frac{1}{\gamma^2}$]

Stimatori di Massima Verosimiglianza

Esercizio 1

Sia X_1, X_2, … X_n un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale avente la seguente distribuzione:

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} \vartheta x^{(\vartheta-1)} & per\ x \in (0,1) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\tau(\vartheta) = 1/\vartheta$.

Esercizio 2

Sia X_1, X_2, … X_n un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale avente distribuzione

$$f(x;\vartheta) = \frac{(x+2)(x+1)\vartheta^3(1-\vartheta)^x}{2}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad 0 < \vartheta < 1.$$

a) Individuare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\tau(\vartheta) = (1/\vartheta) - 1$.
b) Verificare se lo stimatore ottenuto al punto a) è corretto, consistente e a minima varianza.
[Si noti che: $M(X) = \dfrac{3\cdot(1-\vartheta)}{\vartheta}$, $V(X) = \dfrac{3\cdot(1-\vartheta)}{\vartheta^2}$].

Esercizio 3

Sia X_1, X_2 ..., X_n un campione bernoulliano estratto da una popolazione avente densità:

$$f(x;\gamma) = \gamma \cdot e^{-\gamma(x-3)} \qquad x \geq 3, \gamma > 0.$$

a) Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\tau(\gamma) = 1/\gamma$.
b) Sapendo che $M(X) = 3 + 1/\gamma$ e $V(X) = \dfrac{1}{\gamma^2}$, verificare se lo stimatore ottenuto al punto a) è corretto, consistente e a minima varianza.

Esercizio 4

Sia X_1, X_2, … X_n un campione bernoulliano di n unità estratto da una variabile casuale con funzione di densità:

$$f(x;\alpha) = 2\alpha \cdot x \cdot e^{-\alpha x^2} \qquad x > 0,\ \alpha > 0.$$

a) Si determini lo stimatore per α utilizzando il metodo di massima verosimiglianza.
b) Calcolare la stima di α cui si perviene con lo stimatore di massima verosimiglianza, ipotizzando di aver estratto dalla popolazione distribuita secondo $f(x;\alpha)$ un campione bernoulliano così costituito:

x_i	0,01	0,05	0,5	1	2	4	**Totale**
frequenze	35	25	20	10	5	5	100

Intervalli di Stima

Esercizio 1

Da un campione di 200 individui è emerso che 130 di essi sono consumatori abituali di un prefissato prodotto. Determinare l'intervallo di stima al 96% per l'ignota frequenza relativa di consumatori di tale prodotto. **[0,5819; 0,7181]**

Esercizio 2

Sia X una popolazione di distribuzione normale con media e varianza incognite. Viene estratto da X un campione bernoulliano di ampiezza 3 che dà luogo alla seguente realizzazione: 25, 66, 37. Determinare l'intervallo di stima al 95% per la media. **[-9,7012; 95,0346]**

Esercizio 3

In un campione di 8 famiglie aventi la medesima numerosità e appartenenti alla stessa classe di reddito, sono state rilevate le seguenti spese mensili (in migliaia di euro):

1,5; 1,3; 2,2; 2,3; 1; 1,1; 2,4; 1,8

Supponendo che la popolazione di origine sia normale, si determini l'intervallo di stima al livello di confidenza del 99% per la varianza. **[0,1065; 2,1842]**

Esercizio 4

In un campione di 9 unità si sono osservati i seguenti valori

15 16 13 18 9 13 10 11 12.

Sapendo che la popolazione di provenienza è normale con σ^2 noto e pari a 4,41 e che l'intervallo di stima della media ha per estremi i valori 11,187 e 14,813, determinare il livello di confidenza 1-α dell'intervallo. **[0,9904]**

Esercizio 5

Sia data la seguente distribuzione di un gruppo di candidati ad un concorso secondo il voto ed il punteggio riportato nella prova del concorso:

Voto Diploma	*Punteggio alla prova di concorso*		
	10-19	20-25	26-30
36-40	4	2	-
41-45	5	23	15
46-50	8	14	22
51-60	-	3	11

Determinare l'intervallo di stima al livello di confidenza del 95% per il punteggio medio alla prova di concorso. **[22,7971; 24,5954]**

Verifica di Ipotesi

Esercizio 1

Un carattere *X* si distribuisce secondo una variabile casuale normale di media μ ignota e varianza $\sigma^2 = 36$. Da tale popolazione si estrae un campione bernoulliano di numerosità $n = 25$. Fissato $\alpha = 0.05$, determinare:

a) l'intervallo di rifiuto del test per la verifica dell'ipotesi $H_0: \mu = 7$ contro l'alternativa $H_1: \mu \neq 7$;

b) l'intervallo di rifiuto del test per la verifica dell'ipotesi $H_0: \mu = 7$ contro l'alternativa $H_1: \mu > 7$;

c) dopo aver descritto la funzione di potenza del test impiegato al punto b) nella verifica d'ipotesi, fornire il valore che questa assume per: μ = 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10; 11; 12; 13 e delinearne graficamente l'andamento.

Esercizio 2

Allo scopo di analizzare la qualità di un prodotto, si vuole operare un campionamento sull'ignota proporzione di pezzi difettosi di un processo produttivo. Vengono sottoposti a verifica 980 pezzi dei quali 110 risultano difettosi. Verificare, ad un livello di significatività del 8% l'ipotesi che la percentuale di difettosi sia dell'11%. [Accetto H_0]

Esercizio 3

Un individuo lavora a circa 50 Km di distanza dalla città in cui risiede e tutti i giorni si reca al lavoro in automobile compiendo lo stesso tragitto. Durante i primi 4 mesi dell'anno si è recato al lavoro per 91 volte e nell'arco di tale periodo ha osservato che lo scarto quadratico medio (corretto) del consumo giornaliero di benzina è stato pari a 0,7 litri. Nell'arco dei successivi 3 mesi si è recato al lavoro per 61 volte osservando che in questo periodo lo scarto quadratico medio (corretto) del consumo giornaliero di benzina è stato pari a 1,5 litri. Supponendo che il consumo giornaliero di benzina sia distribuito come una v.c. normale, sulla base di ciascun periodo verificare l'ipotesi che la varianza del consumo sia uguale a 1,8 contro l'alternativa che sia diversa da tale livello, fissato $\alpha = 0.05$. [Rifiuto H_0.Accetto H_0]

Esercizio 4

Il gestore di un negozio di profumeria ritiene che ogni giorno in media ci siano 20 clienti che si recano nel suo negozio spendendo un importo superiore o pari a 40€. Egli ha osservato che nei 24 giorni lavorativi del mese di dicembre lo scarto quadratico medio del numero di tali clienti è uguale a 4.3 mentre nei 4 mesi successivi (100 giorni lavorativi) tale scarto è risultato pari a 6.7. Ipotizzando che il numero di clienti che spendono almeno 40€ sia distribuito come una v.c. normale, verificare, per ciascuno dei periodi considerati, l'ipotesi che la varianza sia uguale a 25 contro l'alternativa che sia diversa da 25, fissato $\alpha = 0.05$.

[Accetto H_0 ,Rifiuto H_0]

Esercizio 5

Nel processo produttivo dei collant, il filo elasticizzato, pronto per essere impiegato nella produzione, viene caricato su bobine mediante un particolare procedimento che alle volte comporta la rottura del filo con conseguente fermo della macchina per poterla riattivare. Un campione bernoulliano effettuato sulle rotture ha presentato la seguente distribuzione.

numero di rotture per giorno	0	1	2	3	4	5	6	≥7
numero di giorni	15	41	50	42	27	15	3	7

Verificare se il campione può provenire da una popolazione con media pari a 3 ($\alpha = 0.05$).

[Rifiuto H_0]

Esercizio 6

In un campione di 1250 italiani, 589 dimostrano un atteggiamento positivo nei confronti dei venditori porta a porta; lo stesso sondaggio condotto su 1000 tedeschi ha registrato 312 risposte positive mentre se condotto su 1200 danesi, 480 risposte positive. Verificare, ad un livello di significatività del 4% l'ipotesi nulla che le proporzioni di coloro che mostrano un atteggiamento positivo nei confronti dei venditori porta a porta sono uguali tra

a) italiani e tedeschi; [Rifiuto H_0]
b) italiani e danesi. [Rifiuto H_0]

Esercizio 7

Siano date due popolazioni normali ed indipendenti *X* e *Y*. Dalla popolazione *X* si è estratto un campione bernoulliano di numerosità $n = 5$ e si sono ottenuti i seguenti valori $\sum_{i=1}^{5} x_i = 105$ e $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 2.705$. Dalla popolazione *Y* si è estratto un campione bernoulliano di numerosità $n = 8$ e si sono ottenuti i seguenti valori $\sum_{i=1}^{8} y_i = 160$, $\sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 4.480$. Dopo aver verificato l'ipotesi di omogeneità delle varianze delle due popolazioni, verificare l'ipotesi $H_0\colon \mu_x = \mu_y$ contro l'alternativa $H_1 : \mu_X \neq \mu_y$ (assumere in entrambi i casi il livello di significatività $\alpha = 0.05$). [Accetto H_0]

Esercizio 8

Si sono rilevati i tempi di produzione di 6 operai che assemblano delle componenti elettroniche secondo un determinato schema e si sono ottenuti i seguenti risultati (in minuti) :

8,2 5,3 6,5 5,1 9,7 10,8.

Si sono rilevati inoltre i tempi di produzione di 8 operai che assemblano componenti elettroniche dello stesso tipo ma secondo uno schema di lavoro diverso e si sono ottenuti i seguenti risultati (sempre in minuti)

9,5 8,3 7,5 10,9 9,3 8,0 11,3 8,8.

Assunta la normalità della distribuzione dei tempi di produzione per entrambi gli schemi, verificare ($\alpha = 0.05$) se è indifferente usare i due schemi di lavoro. [Accetto H_0]

Esercizio 9

Da passate esperienze si ritiene che la distribuzione secondo la statura di maschi adulti in una data popolazione sia N (174,16). Si vuole sottoporre a verifica l'ipotesi che attualmente, si possa ritenere ancora valida la distribuzione (α = 0,05). Su un campione di 400 maschi adulti si è ottenuto:

Classi di altezza (in cm)	$\mathbf{n_i}$
Fino a 165	17
—┤ 170	18
—┤ 175	51
—┤ 180	190
Oltre 180	124
Totale	*400*

[Rifiuto H_0]

Esercizio 10

Un campione di 100 famiglie suddiviso per numero di figli ha presentato la seguente distribuzione:

Numero di figli	**Numero di famiglie**
0	18
1	24
2	22
3	21
4	10
5 e oltre	5

Valutare l'ipotesi al livello di significatività α = 0,01 che tale campione provenga da una popolazione in cui il numero di figli per famiglia segua:

a) la distribuzione uniforme, [Rifiuto H_0]
b) la distribuzione di Poisson. [Accetto H_0]

Esercizio 11

Ad un campione di 230 automobilisti italiani è stato chiesto se guidano con cinture allacciate e la cilindrata della loro auto. Sulla base dei risultati riportati nella seguente tabella, verificare (α = 0.05) l'ipotesi di indipendenza tra i caratteri *Cilindrata auto* e *Cinture allacciate*. [Rifiuto H_0]

Cilindrata auto	**Cinture allacciate** **SI**	**NO**
Alta	52	10
Media	65	26
Bassa	20	57

Esercizio 12

Ad un campione di 400 italiani è stato chiesto se leggono almeno 2 libri all'anno ed il loro grado di istruzione. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

	Grado di Istruzione		
Almeno 2 libri letti	*Scuola dell'obbligo*	*Scuola superiore*	*Università*
SI	50	70	90
NO	100	65	25

Verificare l'ipotesi di indipendenza tra grado di istruzione e libri letti in un anno (α = 0.05).
[Rifiuto H_0]